

Estudo das equações aplicáveis em teoria de plasticidade independente do tempo

Study of equations applied in theory of plasticity independent of time

Horácio Delgado Júnior^{1,2}
 Alexandre Alvarenga Palmeira^{1,2}
 Alexandre Fernandes Habibe^{1,2}
 Roberto de Oliveira Magnago^{1,2}

Artigo
Original

Original
Paper

Palavras-chave

Teoria de plasticidade

Equações
independente do
tempo

Resumo

Neste trabalho, foram estudadas as equações aplicadas em teoria de plasticidade independente do tempo, aplicada a carregamento cíclico. Deste estudo teórico foi concluído que o modelo de encruamento isotrópico aplica-se somente á processos de conformação cujas trajetórias de deformação sejam lineares. Mostrou também que o modelo de encruamento cinemático de Prager é utilizado para materiais que encruam linearmente com a tensão deformação. Já no modelo de Mroz, vê-se bom caminho para a generalização do modelo de encruamento cinemático linear. O modelo proposto por Chaboche consiste na introdução de uma nova variável de encruamento que memoriza a máxima amplitude da deformação plástica.

Abstract

In this work, the equations were studied independent of time applied to cyclic loading. This theoretical study concluded that the model of isotropic hardening will be useful only in processes of conformation whose trajectories are linear. It also showed that the model of Prager of kinematic hardening is used for materials that increase linearly with deformation. Already in the Mroz model, sees good way to generalize the linear kinematic hardening model. The proposed by Chaboche model is a introduction of a new variable hardening that memorizes the maximum amplitude of plastic deformation.

Keywords

*Theory of plasticity

Equations independent
of time*

¹ UniFOA – Centro Universitário de Volta Redonda

² UERJ/FAT – Universidade Estadual do Rio de Janeiro / Faculdade de Tecnologia

1. Introdução

Os modelos matemáticos usados comumente para previsões de processos de conformação mecânica são fundamentados em ensaios experimentais e observações macroscópicas. Existem diversos modelos para descrever o comportamento plástico dos materiais durante a aplicação de carregamentos. Os processos de conformação de chapas metálicas envolvem invariavelmente inversões de carregamento e em alguns casos carregamentos complexos com trajetórias de deformação não linear. Na necessidade de melhores previsões, para evitar desperdícios e ajustes durante o processo fabril, os modelos vêm sofrendo constante evolução.

O presente trabalho visa o estudo das equações constitutiva em teoria de plasticidade independente do tempo, aplicada a carregamento cíclico. É dividido em três partes, sendo a primeira mostra uma breve revisão dos principais conceitos da mecânica dos sólidos, a segunda parte apresenta os conceitos da plasticidade clássica e finaliza com o estudo das teorias de plasticidade mais recentes aplicadas a carregamentos cíclicos.

2. Estado de tensões e espaço de tensões

O estado de tensões em um ponto material, apresentado pela figura (1), pode ser caracterizado pelo tensor de segunda ordem σ_j , chamado de tensor de tensões.

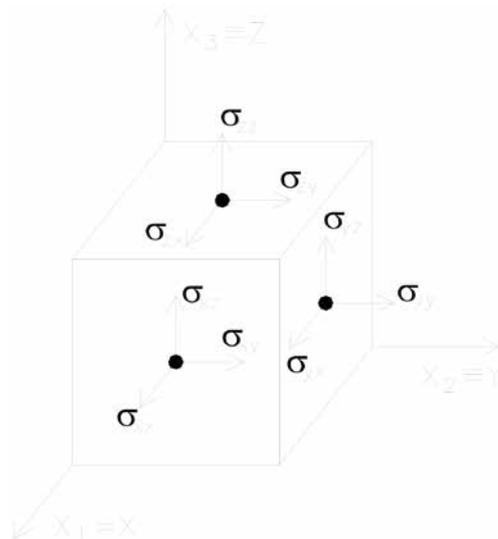


Fig.1- Estado de tensões num ponto

E pode ser representado no espaço de coordenadas cartesianas (x,y,z), pela seguinte matriz:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Conforme apresentado na figura (1), o tensor de tensões é simétrico, portanto possui apenas seis componentes independentes, são elas: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$. Uma vez que se conhece o estado de tensões (tensor de tensões), permite pesquisar um plano para o qual as tensões normais sejam máximas (tensões principais) e as tensões tangenciais sejam nulas. Desta consideração tem-se que:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_j \quad (2)$$

ou

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (3)$$

O sistema linear apresentado na equação (3) deve ter soluções reais, portanto, pode-se dizer que:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (4)$$

ou

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Resolvendo o determinante, tem-se:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad (6)$$

onde:

$$J_1 = \text{tr}(\sigma) = \sigma_{ii} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (7)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{xz}^2 \quad (8)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} = \det[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Sendo J_1, J_2, J_3 os invariantes do tensor de tensões.

Pode-se obter o tensor σ_j associado com a direção principal $n^{(i)}$ ($i=1,2,3$) pela relação:

$$\sigma \cdot n^{(i)} = \sigma_j \cdot n^{(i)} \quad (10)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(i)} \\ n_2^{(i)} \\ n_3^{(i)} \end{bmatrix} = \sigma_i \begin{bmatrix} n_1^{(i)} \\ n_2^{(i)} \\ n_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3). \quad (11)$$

Quando $n^{(i)}$ é o vetor unitário na direção principal i , é válida a relação:

$$n^{(i)} \cdot n^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (12)$$

A equação (10) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Introduzindo R_{ij} , temos:

$$[R_{ij}] = [n_j^{(i)}] = \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

O que prova pela relação(12):

$$[R_{ij}]^{-1} = [R_{ij}]^T \quad (15)$$

Podendo σ_{ij} ser expresso em termos da tensão principal substituindo a equação (13) na equação (15).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = [R_{ij}] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} [R_{ij}]^T \quad (16)$$

Portanto, conhecido a tensão e a direção principal pode-se determinar o estado de tensões inicial.

Na teoria de plasticidade clássica é comum decompor o tensor de tensões em duas partes:

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + S_{ij} \quad (17)$$

onde p é a tensão devido a pressão hidrostática e pode ser expresso por:

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (18)$$

e $p\delta_{ij}$ é chamado de tensor de tensões hidrostáticas. A segunda parte é calculada por:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (19)$$

é chamado de tensor de **tensões desviadoras**, o qual representa o estado de **cisalhamento puro**. A figura 2 apresenta o sentido físico das tensões desviadoras. O tensor de tensões hidrostáticas é responsável pelas alterações de volume. Já o tensor de tensões desviadoras é responsável pela mudança de forma do sólido.

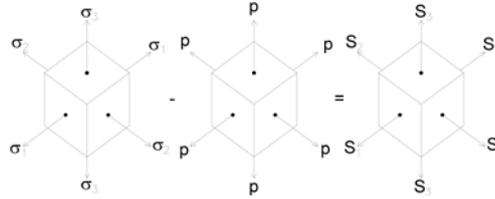


Fig.3- Representação do plano octaédrico no espaço de tensões.

Desta maneira o tensor de tensões desviadoras é obtido de maneira análoga ao tensor de tensões:

$$|S_{ij} - S\delta_{ij}| = 0 \quad (20)$$

ou

$$\begin{vmatrix} S_{xx} - S & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} - S & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - S \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

Resolvendo o determinante, tem-sê:

$$S^3 - J_1' S^2 + J_2' S - J_3' = 0 \quad (22)$$

Sendo fácil observar que seus invariantes são:

$$J_1' = \text{tr}(S) = S_{ii} = S_1 + S_2 + S_3 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \end{aligned} \quad (24)$$

$$J_3' = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} = \det[S_{ij}] = S_1 S_2 S_3 = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix} \quad (25)$$

Onde, S_i ($i = 1,2,3$) são os valores das tensões principais o tensor de tensões desviadoras. Como:

$$S_i = \sigma_i - p, \quad (i = 1,2,3) \quad (26)$$

então:

$$S_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}, \quad (27)$$

$$S_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}, \quad (28)$$

$$S_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{3} \quad (29)$$

Quando o primeiro invariante do tensor desviador é nulo ($J_1' = 0$), o segundo e o terceiro invariante do tensor desviador podem ser relacionados com os invariantes J_i ($i = 1, 2, 3$) do tensor de tensões σ_{ij} , possibilitando a formulação de equações de escoamento.

$$J_2' = \frac{1}{3}(J_1^2 - 3J_2) \quad (30)$$

$$J_3' = \frac{1}{27}(2J_1^3 - 9J_1J_2 + 27J_3) \quad (31)$$

Sendo útil para determinar também as propriedades de um plano normal a um seguimento de reta que passa pela origem e tem ângulos iguais com as direções principais no espaço de tensões. A este plano dá-se o nome de plano **octaédrico**, apresentado pela figura 3, que pode ser definido a partir das direções:

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3} \quad (32)$$

e

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (33)$$

Desta forma:

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (34)$$

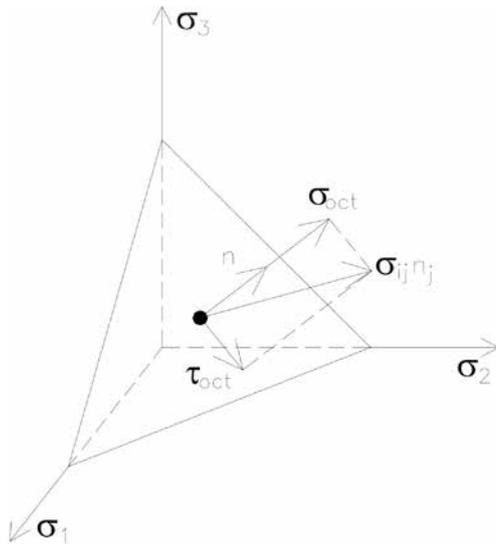


Fig.3- Representação do plano octaédrico no espaço de tensões.

Desta forma pode-se ter um total de oito famílias de planos octaédricos cujas equações são:

$$\pm \sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 = C\sqrt{3} \quad (35)$$

Sendo C uma constante.

A tensão normal octaédrica σ_{oct} conforme apresentado na figura 3, é definida como a tensão normal a um plano octaédrico e pode ser obtida através da seguinte relação:

$$\sigma_{oct} = \sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (36)$$

Em termos das tensões principais, pode-se escrever:

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} J_1 \quad (37)$$

A tensão de cisalhamento octaédrica τ_{oct} conforme apresentado na figura 3, é definida como a tensão tangencial no plano octaédrico e pode ser obtida através da seguinte relação:

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= \left| \sigma_{ij} n_j \right|^2 - \sigma_{oct}^2 \\ &= \frac{1}{9} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} J_2' \quad (38) \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \sqrt{\frac{2}{3} J_2'} = \frac{1}{3} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{yz}^2 + 6\sigma_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (39) \end{aligned}$$

Assim, a tensão de cisalhamento octaédrica pode se relacionar com o segundo invariante do tensor de tensões desviadoras, conforme apresentado pelas equações(38) e (39).

3. Plasticidade Clássica

A teoria de plasticidade clássica é a teoria matemática das deformações irreversíveis independente do tempo. É aplicada para o estudo do escoamento de metais e ligas cujos fenômenos viscoplásticos não sejam significativos. Sendo limitado a baixas temperaturas, ou seja, temperaturas nas quais não haja mudanças nas propriedades físicas dos metais, e carregamentos monotônicos. Esta teoria é usada principalmente para o cálculo de deformações permanentes de estruturas, para prever o colapso plástico de estruturas, para investigação da estabilidade, para previsão das forças requeridas para a conformação dos metais.

Antes de entrar no regime plástico o material deve passar por uma fase elástica onde

as deformações são reversíveis. Desta maneira pode-se decompor a deformação em duas componentes: uma elástica e reversível (ϵ_{ij}^e) e outra plástica permanente (ϵ_{ij}^p).

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (40)$$

A parcela de deformação elástica pode ser obtida da lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \quad (41)$$

onde σ_{ij} é o tensor de segunda ordem que indica o estado de tensões e C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, que guarda as propriedades físicas do material em estudo. Para materiais homogêneos e isotrópicos, têm-se:

$$C_{ijkl} = L\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (42)$$

onde:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (43)$$

que é o módulo de elasticidade transversal e

$$\lambda = L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (44)$$

Ambas denominadas constantes de Lamé que são obtidas através do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν . As constantes E e G podem ser obtidas através dos ensaios de tração e de torção pura respectivamente, em seguida pode-se obter através da equação (4) o coeficiente de Poisson ν .

Para a determinação da deformação plástica permanente admite-se a existência de uma superfície de escoamento no espaço de tensões, o qual pode ser descrita por uma função de escoamento.

$$F = F(\sigma_{ij}) \begin{cases} < 0, & \text{regime elástico} \\ = 0, & \text{regime plástico} \end{cases} \quad (45)$$

A equação (45) descreve o mecanismo de escoamento de um ponto material. Quando $F = 0$, o estado de tensões no ponto satisfaz o critério de escoamento havendo deformação plástica, caso contrário $F < 0$ o estado de tensões não é suficiente para levar o material ao escoamento, portanto permanecendo no regime elástico. A figura 4 mostra a representação da superfície de escoamento no espaço de tensões. Conforme visto, a superfície de escoamento tem sua geratriz paralela ao eixo da pressão hidrostática quando $p = J_1 / 3$.

Para materiais metálicos, os estudos experimentais evidenciam que o escoamento plástico independe da pressão hidrostática. Sendo relacionado apenas com o tensor de tensões desviadoras S_{ij} , que é a parte do tensor de tensões que fornece a mudança de forma. Desta maneira, o critério de escoamento pode ser escrito em termos dos invariantes J_2' e J_3' do tensor de tensões desviadoras para materiais isotrópicos.

$$F(J_2', J_3') = 0 \quad (46)$$

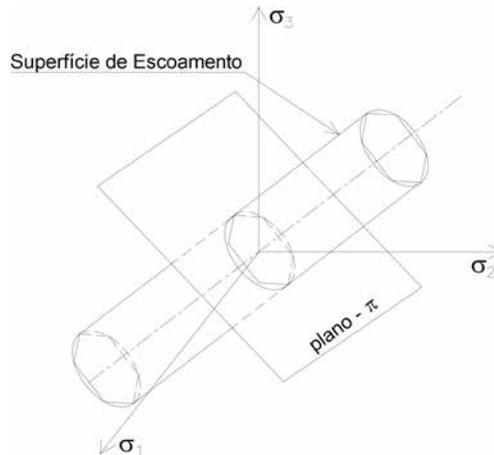


Fig.4- Representação da superfície de escoamento no espaço de tensões.

Uma vez que o escoamento independe da pressão hidrostática, uma forma mais simples de representar a superfície de escoamento é projetando-a no plano- π e rebatendo os eixos das tensões principais sobre ele. A figura 5 mostra uma vista lateral do plano- π e uma projeção da superfície de escoamento rebatida.

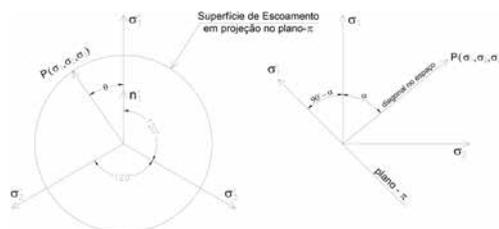


Fig.5- Representação da superfície de escoamento rebatida sobre o plano- π .

Para representar o estado de tensões de um ponto através dos rebatimentos introduzidos pela figura 5 é preciso ter duas direções: α e θ . O ângulo α representa inclinação da diagonal em relação ao plano- π . Já o ângulo θ a orientação da diagonal no plano desviador que contém o ponto P. Assim, tem-se os seguintes estados de tensões em presença da pressão hidrostática:

- 1 – para $\theta = 0^\circ$ - tração uniaxial,
- 2 – para $\theta = 30^\circ$ - cisalhamento puro,
- 3 – para $\theta = 60^\circ$ - compressão uniaxial.

Existem diversos critérios de escoamento entre eles os mais utilizados são os de von Mises e Tresca. O critério de von Mises (1913) assume que o escoamento plástico ocorre quando o segundo invariante J_2' do tensor de tensões desviadoras S chega a um valor crítico k^2 . Portanto, tem-se que

$$J_2' - k^2 = 0 \quad (47)$$

para o escoamento ou deformação plástica e

$$J_2' < k^2 \quad (48)$$

para deformação elástica. Em termos das componentes de tensão o critério de escoamento pode ser escrito como:

$$\frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 = k^2 \quad (49)$$

ou em termos das tensões principais

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k^2. \quad (50)$$

Desta maneira a superfície de escoamento referente ao critério de von Mises é um cilindro cuja geratriz é paralela ao eixo das pressões hidrostáticas. Sendo o raio deste cilindro igual a:

$$r = \sqrt{2}k. \quad (51)$$

A figura 6 apresenta as superfícies de escoamento de von Mises e Tresca rebatidas sobre o plano- π . A superfície de escoamento para o critério de Tresca é inscrita na de von Mises, conforme apresentado na figura 6. Adiante será exposto a formulação do critério de Tresca.

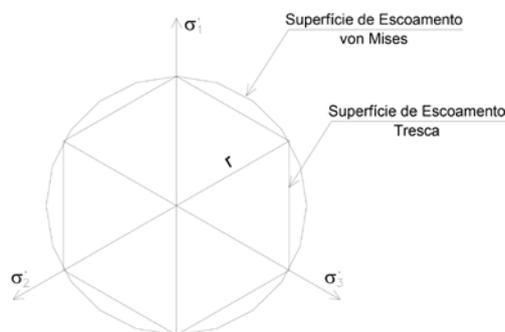


Fig. 6- Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises rebatida sobre o plano- π .

No caso de estado plano de tensões ($\sigma_3 = 0$), a equação (50) se reduz para

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3k^2. \quad (52)$$

O que dá uma elipse no plano ($\sigma_3 = 0$). A figura 7 representa a superfície de escoamento no plano $\sigma_1\sigma_2$ para os critérios de von Mises e Tresca. Desta maneira para determinar a constante k basta conhecer a tensão de escoamento em tração uniaxial σ_y .

$$\sigma_1 = \sigma_y \quad (53)$$

e

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (54)$$

Substituindo na equação (52), tem-se:

$$\frac{1}{3}\sigma_y^2 = k^2 \quad (55)$$

Portanto

$$k = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (56)$$

O valor de k pode ser determinado também a partir da tensão de escoamento em cisalhamento puro τ_y . Quando $\sigma_2 = 0$ e

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_y \quad (57)$$

Substituindo na equação (50), tem-se que:

$$\tau_y^2 = k^2 \quad (58)$$

Portanto

$$k = \tau_y \quad (59)$$

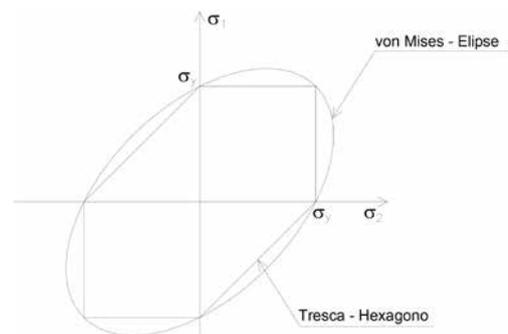


Fig. 7- Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises no Plano

$$\sigma_3 = 0$$

O critério de Tresca (1864) foi desenvolvido com base nos ensaios experimentais de Coulomb para materiais metálicos em processo de extrusão. Assume que o escoamento plástico ocorre quando o cisalhamento máximo atinge um valor crítico k . Matematicamente ele é escrito como:

$$\tau_{\max} = k \quad (60)$$

para o escoamento ou deformação plástica e

$$\tau_{\max} < k \quad (61)$$

para deformação elástica. Em termos das tensões principais

$$\max \left[\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right] = k^2 \quad (62)$$

No caso de estado plano de tensões ($\sigma_3 = 0$), a equação (62) se reduz para

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2k, \quad (63)$$

$$\sigma_1 = \pm 2k, \quad (64)$$

$$\sigma_2 = \pm 2k. \quad (65)$$

O que representa um hexágono conforme apresentado pelas figuras 6 e 7.

A constante do material k pode ser determinada pelo ensaio de tração uniaxial, portanto através da equação (62), tem-se que

$$k = \frac{\sigma_y}{2} \quad (66)$$

Como alternativa, pode-se determinar o valor de k pelo ensaio de cisalhamento puro, desta forma

$$k = \tau_y \quad (67)$$

Os critérios de escoamento apresentados anteriormente apresentam boa concordância com os estudos experimentais realizados para metais e ligas, consideram que inicialmente os materiais são isotrópicos. Existem outros critérios de escoamento que consideram os materiais como anisotrópicos como o critério de Hill (1948), que não será discutido neste trabalho.

Quando se considera a plasticidade cíclica, os parâmetros que descrevem a superfície de escoamento variam, tendo em vista que os materiais podem encruar ou sofrer processo de amolecimento. Desta maneira a superfície de escoamento passa a depender não só do estado de tensões, mas também de parâmetros que descrevem esta mudança de propriedades. A estes parâmetros, dá-se o nome de parâmetros de encruamento, que podem ser escalares, ou tensoriais.

$$f = f(\sigma_y, \text{parâmetros de encruamento}) \begin{cases} \text{se } f < 0, \text{ domínio elástico} \\ \text{se } f = 0, \text{ escoamento plástica} \end{cases} \quad (68)$$

A evolução da superfície de escoamento é comumente descrita pela lei associada do escoamento que relaciona o incremento de de-

formação plástica com o gradiente da função de escoamento no espaço de tensões:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (69)$$

onde $d\lambda$ é o multiplicador plástico.

A figura 8 o apresenta a ilustração da regra da regra da normalidade onde o incremento de deformação plástica é proporcional ao gradiente de f , portanto apresenta-se normal a superfície de escoamento.

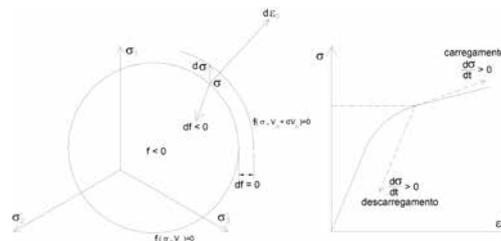


Fig.8- Regra da normalidade para carregamento e descarregamento

4. Encruamento Isotrópico

O postulado de estabilidade de Drucker (1951) pode ser usado para determinar o potencial plástico de encruamento aplicado a materiais estáveis e perfeitamente plásticos. Duas conclusões podem ser tiradas do postulado de Drucker: 1- a superfície de escoamento é convexa, 2- o incremento de deformação plástica é normal a superfície de escoamento.

O incremento de deformação plástica é determinado através da equação (69) sendo assim o potencial plástico é igual a função de escoamento.

$$Q = F \quad (70)$$

Para materiais isotrópicos e insensíveis a pressão hidrostática, como os metais dúcteis, a função de escoamento para o encruamento isotrópico é:

$$F = f(J_2', J_3') - k(\alpha) = 0 \quad (71)$$

onde J_2' e J_3' são os segundos e terceiros invariantes do tensor de tensões desviadoras S .

A figura 8 apresenta a evolução da superfície de escoamento para o encruamento isotrópico. Nota-se que a evolução da superfície de escoamento se dá apenas pela variação de tamanho, mantendo-se a mesma origem e forma da superfície inicial. Bastando apenas o ensaio de tração uniaxial para determinar os parâmetros da função de escoamento.

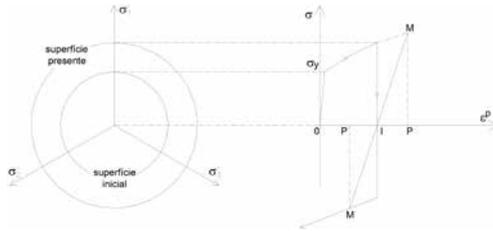


Fig.9- Evolução da Superfície de escoamento para o encruamento isotrópico.

5. Encruamento Cinemático

Para o modelo cinemático de Prager[1949] a superfície de escoamento é definida pela seguinte função:

$$f = \phi(\sigma_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) - k = 0 \quad (72)$$

A mudança na posição da superfície de escoamento, ou seja a translação é atribuída ao TENSOR DE TENSÕES CINEMÁTICO definido por:

$$X_{ij} = c\varepsilon_{ij}^p, dX_{ij} = cd\varepsilon_{ij}^p \quad (73)$$

Desta forma o multiplicador plástico é determinado substituindo a função de escoamento no incremento de deformação plástico com $df = f = 0$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : dX_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} - c.d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (74)$$

O incremento plástico no carregamento e descarregamento é determinado por:

$$d\lambda = H(f) \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} \right\rangle}{c \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) : \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \begin{cases} H(f) = 0, se f < 0 \\ H(f) = 1, se f \geq 0 \end{cases} \quad (75)$$

sendo $H(f)$ a função de Heaviside aplicada a função de escoamento, ou seja: $H(u) = 0$ se $u < 0$ e $H(u) = 1$ se $u \geq 0$, conforme apresentado pela figura 10.

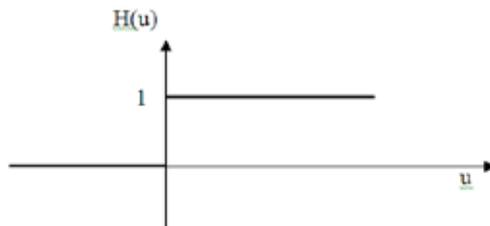


Fig.10- Gráfico da função de Heaveside.

Considerando $\langle u \rangle = u H(u)$ a equação do incremento de deformação plástica pode ser definida por:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{1}{c} \right) H(f) \langle n : d\sigma_{ij} \rangle n \quad (76)$$

em que n é o vetor unitário normal a superfície.

O módulo do encruamento é determinado pela constante c :

$$c = \frac{d\sigma_{ij} : \varepsilon_{ij}^p}{d\varepsilon_{ij}^p : d\varepsilon_{ij}^p} \quad (77)$$

Como se observa o modelo de Prager considera que o encruamento cinemático linear com a tensão deformação, sendo válido apenas para casos de carregamento onde não há grandes mudanças na trajetória de deformação. Portanto, quando se observa o efeito de Bauschinger em carregamentos complexos, carregamentos e descarregamentos sucessivos e em direções reversas não se aplica bem o modelo de Prager.

A formulação proposta por Ziegler considera uma nova lei de encruamento, dada por:

$$dX_{ij} = (\sigma_{ij} - X_{ij}) d\mu \quad (78)$$

sendo $d\mu$ um fator multiplicador obtido pela condição de consistência $df = 0$.

$$d\mu = H(f) \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} \right\rangle}{(\sigma_{ij} - X_{ij}) : \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)} \quad (79)$$

Desta forma o multiplicador plástico $d\lambda$ assume diferentes valores dependendo dos invariantes dos tensores X_{ij} e σ_{ij} . Isto introduz o conceito do encruamento cinemático não linear e pode ser escrito por:

$$d\lambda = \frac{H(f)}{C(\sigma_{ij})} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} \right\rangle}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) : \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)} \quad (80)$$

Sendo que $C(\sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij}^p$ é a projeção de $d\sigma_{ij}$ na normal a superfície de carregamento. É também a projeção de dX_{ij} na normal, conforme mostrado na figura 4.

6. Modelo de Mroz

Motivado sobretudo pelos resultados do ensaio uniaxial de tração-compressão,

Mroz[1967] propôs o modelo da multi-superfície de escoamento introduzindo o conceito de um “MÓDULO DO CAMPO DE TRABALHO PLÁSTICO” em lugar do simples módulo de encruamento c introduzido por Prager.

$$X_{ij} = c(\varepsilon_{ij}^p) \varepsilon_{ij}^p \quad (81)$$

Sendo X_{ij} um tensor de segunda ordem que determina a localização do centro da superfície de escoamento no espaço de tensões para cada passo de carregamento. Desta maneira para cada ciclo de carregamento terá uma nova coordenada e uma nova dimensão para a superfície de escoamento. Assumindo agora uma nova superfície de escoamento em função dos novos parâmetros introduzidos pelo modelo de Mroz.

$$f^l = \phi(\sigma_{ij} - X_{ij}^l) - k^l \quad (82)$$

onde: X_{ij}^l corresponde ao centro da superfície de escoamento no passo de carregamento l .

K_l é o tamanho da superfície de escoamento no passo de carregamento l

Assim, o escoamento plástico e o incremento de deformação plástica são obtidos para cada função de escoamento:

$$f_0 = f_1 = \dots = f_{l-1} = f_l = 0 \quad (83)$$

$$d\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} = \dots = d\lambda_{l-1} \frac{\partial f_{l-1}}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} \quad (84)$$

O incremento de X é função do incremento do multiplicador plástico, e é obtido considerando um ponto de tensões em uma superfície de escoamento $f_{l+1} = 0$:

$$dX_{ij}^l = d\mu_l (\sigma_{ij}^{l+1} - \sigma_{ij}^l) \quad (85)$$

Para o caso particular em que k_l é uma constante a condição de consistência de $df_l = 0$ reduz a:

$$\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} - \frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} : dX_{ij} = \frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} - \frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} : (\sigma_{ij}^{l+1} - \sigma_{ij}^l) d\mu_l = 0 \quad (86)$$

sendo assim o multiplicador plástico é determinado por:

$$d\mu_l = H(f_l) \frac{\left\langle \frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} \right\rangle}{\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} : (\sigma_{ij}^{l+1} - \sigma_{ij}^l)} = H(f_l) \frac{\langle n : d\sigma_{ij} \rangle}{n : (\sigma_{ij}^{l+1} - \sigma_{ij}^l)} \quad (87)$$

e as translações das superfícies são dadas por:

$$dX_{ij}^0 = dX_{ij}^1 = \dots = dX_{ij}^{l-1} = dX_{ij}^l \quad (88)$$

O incremento de deformação plástica independente do multiplicador plástico $d\mu$, e dado por:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{1}{c_l} \right) H(f_l) \langle n : d\sigma_{ij} \rangle n \quad (89)$$

Sendo n o vetor unitário normal a superfície de f . Portanto, definida para a função de escoamento como sendo a relação entre o gradiente de f em relação a σ e o seu módulo.

$$n = \frac{\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}}}{\left[\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} : \frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (90)$$

Se a expansão da superfície de escoamento for considerada, quando o encruamento isotrópico é superposto ao encruamento cinemático o parâmetro de extensão k_k depende da deformação plástica acumulada definida por:

$$\lambda = \int (d\varepsilon_{ij}^p : d\varepsilon_{ij}^p)^{\frac{1}{2}} \quad (91)$$

Então a nova superfície de escoamento é descrita por:

$$f_k = \phi(\sigma_{ij} - X_{ij}^k) - k_k(\lambda) \quad (92)$$

Aplicando o critério de translação:

$$d\mu_k = H(f_k) \frac{\left\langle \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} : d\sigma_{ij} \right\rangle - dk_k}{\frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} : (\sigma_{ij}^{l+1} - \sigma_{ij}^l)}, \text{ para } k \leq l \quad (93)$$

ou

$$d\mu_k = H(f_k) \left[1 - \frac{\frac{\partial f_k}{\partial \lambda}}{c_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} : \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} \right]^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{\langle n : d\sigma_{ij} \rangle}{n : (\sigma_{ij}^{I+1} - \sigma_{ij}^I)} \quad (94)$$

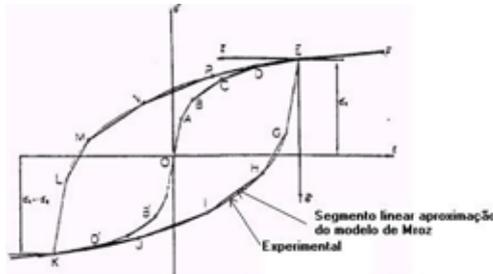


Fig. 11- Comparação dos resultados experimentais com as aproximação de Mroz.

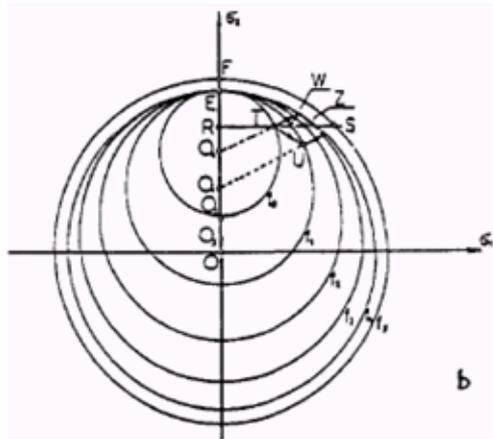


Fig. 12- Novas superfícies de escoamento para cada ciclo de carregamento.

A figura 11 apresenta a comparação entre os resultados experimentais e o modelo de Mroz, nota-se uma boa concordância entre os resultados.

A figura 12 apresenta a evolução da superfície de escoamento e as novas superfícies de escoamento para cada ciclo de carregamento e descarregamento.

O modelo de Mroz é um bom caminho para a generalização do modelo de encruamento cinemático linear, sendo possível descrever a não linearidade entre a tensão e a deformação através dos loops, o efeito de Bauschinger e o encruamento cíclico.

A figura 13 faz uma comparação entre os parâmetros de evolução das superfícies de escoamento para cada uma das formulações apresentadas anteriormente.

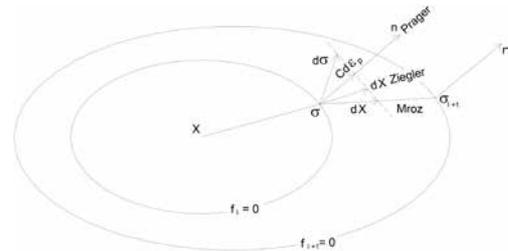


Fig. 13- Diferentes tipos de encruamento.

7. Memória da máxima deformação plástica

O modelo proposto por Chaboche (1979) consiste na introdução de uma nova variável de encruamento q , que memoriza a máxima amplitude da deformação plástica. Através de análise da microestrutura esta variável introduzida tem relação com as discordâncias. Desta maneira introduzindo uma superfície de não encruamento no espaço das deformações plásticas, conforme apresentado pela figura 14.

$$F = \frac{2}{3} J(\varepsilon_{ij}^p - \zeta_{ij}) - q \leq 0 \quad (95)$$

O estado de deformação dentro da superfície, é assumido quando $dF = 0$. O estado de memória ocorre quando $F = 0$ e $(\partial F / \partial \varepsilon_{ij}^p) : d\varepsilon_{ij}^p > 0$, assim:

$$dq = \frac{1}{2} H(F) \langle n : n^* \rangle dp \quad (96)$$

onde n é o vetor unitário normal a $f = 0$ no espaço de tensões e n^* é o vetor unitário normal a $F = 0$ no espaço de deformações.

A condição de consistência ($dF = 0$) é usada para determinar o método para a evolução do centro:

$$d\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{(2/3)} H(F) \langle n : n^* \rangle n^* dp \quad (97)$$

A lei de encruamento é modificada para cada valor de q . Por exemplo, pode ser dada por:

$$dR = b(Q - R) dp \quad (98)$$

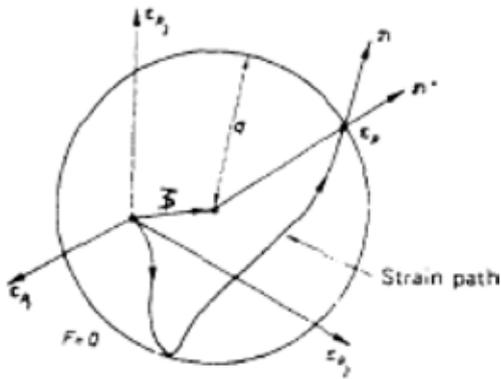


Fig. 14- Definição das variáveis para a superfície no espaço das deformações.

sendo

$$dQ = 2\mu(Q_s - Q)dq = \mu H(F)(Q_s - Q)dp \quad (99)$$

onde μ e Q_s são dois coeficientes. Do ensaio de tração-compressão cíclica, $q = \Delta\varepsilon_{p\max} / 2$, quando $\Delta\varepsilon_{p\max}$ representa a máxima deformação plástica.

8. Conclusões

Deste estudo, conclui-se que:

- O modelo de encruamento isotrópico aplica-se apenas a processos de conformação cujas trajetórias de deformação

sejam lineares, não representando fisicamente problemas com mudanças bruscas na trajetória de deformação.

- O modelo de encruamento cinemático de Prager, é utilizado para materiais que encruam linearmente com a tensão deformação. Não sendo válido quando se observa o efeito de Bauschinger em carregamentos complexos, carregamentos e descarregamentos sucessivos e em direções reversas.
- O modelo de Mroz é um bom caminho para a generalização do modelo de encruamento cinemático linear, sendo possível descrever a não linearidade entre a tensão e a deformação através dos loops, o efeito de Bauschinger e o encruamento cíclico. No entanto necessitam de mais valores de ensaio e a simulação usando modelos como este requer maior esforço computacional.
- O modelo proposto por Chaboche consiste na introdução de uma nova variável de encruamento q , que memoriza a máxima amplitude da deformação plástica. Desta forma a lei de encruamento é modificada para cada valor de q . Com o modelo de Chaboche é possível simular o processo de conformação mecânica a partir de um histórico de evolução das propriedades mecânicas do material.

9. Bibliografia

1. CHABOCHE, J.L., *Time-Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity*, International Journal of Plasticity, Vol.2 , 1986.
2. NOUAILHAS, D., CHABOCHE, J.L., SAVALLE, S., CAILLETAUD, G., *On the Constitutive Equations for Cyclic Plasticity Under Nonproportional Loading*, International Journal of Plasticity, Vol.1 , 1985.
3. LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L., *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1994
4. KHAN, A.S., HUANG, S., *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons, 1995.
5. HILL, R., *A Theory of Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metal*, Proceeding of the royal society of London, 1948, A 193, p.p. 281-297.